CHƯƠNG 1

Bộ

Toàn bộ toán học có thể được mô tả bằng các tập hợp. Điều này càng trở nên rõ ràng hơn và Điều này càng trở nên rõ ràng hơn khi bạn đi sâu vào toán học. Nó sẽ hiển nhiên trong hầu hết các khóa học cấp cao của bạn, và chắc chắn là trong khóa học này. Lý thuyết tập hợp là một ngôn ngữ hoàn toàn phù hợp để mô tả và giải thích tất cả các loại cấu trúc toán học.

1.1 Giới thiệu về tập hợp

Tập hợp là một tập hợp các sự vật. Các sự vật này được gọi là các phần tử của tập hợp. Chúng ta chủ yếu quan tâm đến các tập hợp mà các phần tử của chúng là các thực thể toán học, chẳng hạn như số, điểm, hàm số, v.v.

Một tập hợp thường được biểu diễn bằng cách liệt kê các phần tử của nó giữa các dấu phẩy, được bao quanh bởi dấu ngoặc nhọn. Ví dụ, tập hợp 2,4,6,8 là một tập hợp có bốn phần tử, là các số 2, 4, 6 và 8. Một số tập hợp có vô số phần tử. Ví dụ, hãy xem xét tập hợp tất cả các số nguyên,

..., 4, 3, 2, 1,0,1,2,3,4,... .

Ở đây, các dấu chấm biểu thị một dãy số tiếp diễn vô tận theo cả chiều dương và chiều âm. Một tập hợp được gọi là tập hợp vô hạn nếu nó có vô số phần tử; ngược lại, nó được gọi là tập hợp hữu hạn .

Hai tập hợp được coi là bằng nhau nếu chúng chứa chính xác các phần tử giống hệt nhau. Ví dụ: 2,4,6,8 = 4,2,8,6 vì mặc dù thứ tự các phần tử khác nhau, nhưng chúng giống hệt nhau; còn 2,4,6,8 = 2,4,6,7 .

... 4, 3, 2, 1,0,1,2,3,4... = 0, 1,1, 2,2, 3,3, 4,4,... .

Chúng ta thường dùng chữ cái viết hoa để đại diện cho các tập hợp. Khi thảo luận về tập hợp 2,4,6,8, chúng ta có thể viết A = 2,4,6,8 và sau đó dùng A để đại diện cho 2,4,6,8 . Để diễn đạt rằng 2 là một phần tử của tập hợp A, ta viết 2 A, và đọc là “2 là một phần tử của A,” hoặc “2 nằm trong A,” hoặc đơn giản là “2 trong A.” Ta cũng có 4 A, 6 A và 8 A, nhưng 5 A. Ta đọc biểu thức cuối cùng này là “5 không phải là một phần tử của A,” hoặc “5 không nằm trong A.” Các biểu thức như 6,2 A hoặc 2,4,8 A được sử dụng để chỉ ra rằng có nhiều phần tử trong một tập hợp.

Một số bộ sưu tập có ý nghĩa quan trọng đến mức chúng tôi dành riêng những ký hiệu đặc biệt cho chúng. Tập hợp các số tự nhiên (tức là các số nguyên dương) được ký hiệu là N, nghĩa là,

N = 1,2,3,4,5,6,7,... .

Tập hợp các số nguyên

Z = ..., 3, 2, 1,0,1,2,3,4,...

R là một tập hợp cơ bản khác. Ký hiệu R đại diện cho tập hợp tất cả các số thực, một tập hợp chắc chắn đã quen thuộc với bạn từ giải tích. Các tập hợp đặc biệt khác sẽ được liệt kê sau trong phần này.

Tập hợp không nhất thiết chỉ có các số làm phần tử. Tập hợp B = T,F bao gồm hai chữ cái, có thể đại diện cho các giá trị "đúng" và "sai". Tập hợp C = a, e, i, o, u bao gồm các nguyên âm viết thường trong bảng chữ cái tiếng Anh.

Tập hợp D = (0,0),(1,0),(0,1),(1,1) có các phần tử là bốn góc của một hình vuông trên mặt phẳng tọa độ xy . Do đó , (0,0) D, (1,0) D, v.v., nhưng (1,2) D (chẳng hạn). Thậm chí một tập hợp có thể có các tập hợp khác làm phần tử. Xét tập hợp E = 1, 2,3, 2,4 có ba phần tử: số 1, tập hợp 2,3 và tập hợp 2,4 . Do đó, 1 E , 2,3 E và 2,4 E. Nhưng lưu ý rằng, 2 E, 3 E và 4 E.

Xét tập hợp M = có 0 0 M, nhưng 1 1 0 0 0 , 0 0 1 , 0 1 1 (0 1 1) gồm ba ma trận hai nhân hai. Chúng ta M. Các chữ cái có thể 0 0 phần tử: Nếu a = dùng làm ký hiệu biểu thị 0 1 b = và c = của một tập hợp

0 0 0 0 , 1 0 0 1 1 0 1 1 , Khi đó M = a, b, c .

Nếu X là một tập hợp hữu hạn, thì số phần tử (cardinality) của nó là số phần tử mà nó có, và số này được ký hiệu là |X|. Do đó, đối với các tập hợp trên, |A| = 4, |B| = 2 , | C| = 5, |D| = 4, |E| = 3 và |M| = 3.

Có một tập hợp đặc biệt, tuy nhỏ nhưng đóng vai trò rất quan trọng. Tập hợp rỗng là tập hợp không có phần tử nào. Chúng ta ký hiệu nó là . Bất cứ khi nào bạn thấy ký hiệu , nó có nghĩa là . Lưu ý rằng || = 0. Tập hợp rỗng là tập hợp duy nhất có số phần tử bằng không.

Hãy cẩn thận khi viết tập hợp rỗng. Đừng viết khi bạn muốn nói .

Hai tập hợp này không thể bằng nhau vì không chứa gì trong khi chứa một thứ, cụ thể là tập hợp rỗng. Nếu điều này gây khó hiểu, hãy nghĩ về một tập hợp như một cái hộp chứa đồ vật bên trong, ví dụ, 2, 4, 6, 8 là một "hộp" chứa bốn số. Tập hợp rỗng = là một hộp rỗng. Ngược lại, là một hộp có một hộp rỗng bên trong. Rõ ràng, có sự khác biệt: Một hộp rỗng không giống với một hộp có một hộp rỗng bên trong. Do đó = . (Bạn cũng có thể lưu ý || = 0 và = 1 như bằng chứng bổ sung cho thấy = .)

Ví dụ về chiếc hộp này có thể giúp chúng ta suy nghĩ về các tập hợp. , , Tập hợp F = có vẻ lạ nhưng thực ra rất đơn giản. Hãy nghĩ về nó như một chiếc hộp chứa ba thứ: một hộp rỗng, một hộp chứa một hộp rỗng, và một hộp chứa một hộp chứa một hộp rỗng. Do đó |F| = 3. Tập hợp G = N,Z là một hộp chứa hai hộp, hộp số tự nhiên và hộp số nguyên. Do đó |G| = 2.

Một ký hiệu đặc biệt gọi là ký hiệu xây dựng tập hợp được sử dụng để mô tả các tập hợp quá lớn hoặc quá phức tạp để liệt kê giữa dấu ngoặc nhọn. Hãy xem xét tập hợp vô hạn các số nguyên chẵn E = ..., 6, 4, 2,0,2,4,6,... . Trong ký hiệu tập hợp, tập hợp này được viết là

E = 2n : n Z .

Chúng ta đọc dấu ngoặc nhọn đầu tiên là "tập hợp tất cả những thứ có hình dạng", và dấu hai chấm là "sao cho". Vì vậy, biểu thức E = 2n : n Z được đọc là "E bằng tập hợp tất cả những thứ có hình dạng 2n, sao cho n là một phần tử của Z". Ý tưởng là E bao gồm tất cả các giá trị có thể có của 2n, trong đó n nhận tất cả các giá trị trong Z.

Nhìn chung, một tập hợp X được viết bằng ký hiệu xây dựng tập hợp có cú pháp như sau:

X = biểu thức : quy tắc ,

trong đó các phần tử của X được hiểu là tất cả các giá trị của "biểu thức" được xác định bởi "quy tắc". Ví dụ, ở trên E là tập hợp tất cả các giá trị của biểu thức 2n thỏa mãn quy tắc n Z. Có thể có nhiều cách để biểu diễn cùng một tập hợp. Ví dụ, E = 2n : n Z = n : n là số nguyên chẵn = n : n = 2k,k Z. Một cách viết phổ biến khác là

E = n Z : n là số chẵn ,

Hãy đọc "E là tập hợp tất cả các phần tử n trong Z sao cho n là số chẵn." Một số tác giả sử dụng dấu gạch ngang thay vì dấu hai chấm; ví dụ: E = n Z | n là số chẵn. Chúng ta sử dụng dấu hai chấm.

Ví dụ 1.1 Dưới đây là một số hình minh họa khác về ký hiệu xây dựng tập hợp.

1. n : n là số nguyên tố = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,... 2. n

N : n là số nguyên tố = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...

2 3. n : n Z = 0,1,4,9,16,25,...

2 4. x R : x 2 = 0 = 2, 2

2 5. x Z : x 2 = 0 =

6. x Z : |x| < 4 = 3, 2, 1,0,1,2,3 7. 2x :

x Z,|x| < 4 = 6, 4, 2,0,2,4,6

8. x Z : |2x| < 4 = 1,0,1

Các mục 6–8 ở trên nêu bật sự xung đột về ký hiệu mà chúng ta luôn phải lưu ý. Biểu thức |X| có nghĩa là giá trị tuyệt đối nếu X là một số và là số lượng phần tử nếu X là một tập hợp. Sự khác biệt này luôn phải rõ ràng từ ngữ cảnh. Xét x Z : |x| < 4 trong Ví dụ 1.1 (6) ở trên. Ở đây x Z, vì vậy x là một số (không phải là một tập hợp), và do đó dấu gạch ngang trong |x| phải có nghĩa là giá trị tuyệt đối, chứ không phải số lượng phần tử. Mặt khác, giả sử A = 1,2 , 3,4,5,6 , 7 và B = X A : |X| < 3 . Các phần tử của A là các tập hợp (không phải là số), vì vậy |X| trong biểu thức cho B phải có nghĩa là số lượng phần tử. Do đó B = 1,2 ,

7 .

Ví dụ 1.2 Mô tả tập hợp A = 7a + 3b : a, b Z Giải: Tập hợp này .

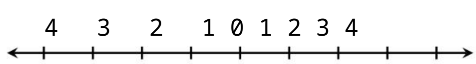
chứa tất cả các số có dạng 7a + 3b, trong đó a và b là số nguyên. Mỗi số như vậy (7a + 3b) đều là số nguyên, vì vậy A chỉ chứa các số nguyên. Nhưng là những số nguyên nào ? Nếu n là bất kỳ số nguyên nào, thì n = 7n + 3(2n), suy ra n = 7a + 3b , trong đó a = n và b = 2n. Vì vậy, n A. Chúng ta đã chứng minh được rằng A chỉ chứa các số nguyên, và mọi số nguyên đều là phần tử của A.

Do đó, A = Z.

Chúng ta kết thúc phần này với phần tóm tắt về các tập hợp đặc biệt. Đây là các tập hợp Những thứ phổ biến đến mức được đặt tên và ký hiệu riêng.

- Tập hợp rỗng: =
- Các số tự nhiên: N = 1, 2, 3, 4, 5,...
- Các số nguyên: Z = ..., 3, 2, 1,0,1,2,3,4,5,...
- Tập hợp các số hữu tỉ: Q = x : x = $\frac{m}{N}$, trong đó m, n Z và n = 0
- Các con số thực tế: R

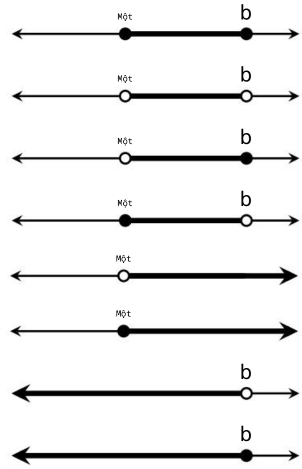
Chúng ta hình dung tập hợp R các số thực như một đường thẳng số dài vô tận.



Hãy lưu ý rằng Q là tập hợp tất cả các số trong R có thể được biểu diễn dưới dạng phân số của hai số nguyên. Bạn có thể biết rằng Q = R, vì $\overline{2}$ Q nhưng $\overline{2}$ R. (Nếu không, điểm này sẽ được đề cập trong Chương 6.)

Trong giải tích, bạn đã gặp các khoảng trên trục số. Giống như R, đây cũng là những tập hợp số vô hạn. Bất kỳ hai số a, b R với a < b đều tạo ra nhiều khoảng khác nhau. Về mặt đồ thị, chúng được biểu diễn bằng một đoạn thẳng đậm trên trục số giữa a và b. Một hình tròn đặc ở một đầu mút cho biết số đó nằm trong khoảng. Một hình tròn rỗng cho biết một điểm không nằm trong khoảng.

- Khoảng đóng: [a,b] = x R : a ≤ x ≤ b
- Khoảng mở: (a,b) = x R : a < x < b
- Khoảng nửa mở: (a,b] = x R : a < x ≤ b
- Khoảng nửa mở: [a,b) = x R : a ≤ x < b
- Khoảng vô hạn: (a,∞) = x R : a < x
- Khoảng vô hạn: [a,∞) = x R : a ≤ x
- Khoảng vô cực: (∞,b) = x R : x < b
- Khoảng vô hạn: (∞,b] = x R : x ≤ b



Mỗi khoảng này là một tập hợp vô hạn chứa vô số số làm phần tử. Ví dụ, mặc dù độ dài ngắn, khoảng (0,1, 0,2) chứa vô số số, tức là tất cả các số nằm giữa 0,1 và 0,2. Thật không may là ký hiệu (a,b) có thể biểu thị cả một khoảng mở trên đường thẳng và một điểm trên mặt phẳng. Sự khác biệt thường rõ ràng từ ngữ cảnh. Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ thấy một ý nghĩa khác của (a,b).

Bài tập cho Phần 1.1

A. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của chúng trong dấu ngoặc nhọn.

1. 5x 1 : x Z
2. 3x+2 : x Z
3. x Z : 2 ≤ x < 7
4. x N : 2 < x ≤ 7
2 5. x R : x = 3
2 6. x R : x = 9
2 7. x R : x +5x = 6
x R : x +5x 3 2 8 = 6x

9. x R : sinπx = 0
10. x R : cos x = 1
11. x Z : |x| < 5
12. x Z : |2x| < 5
13. x Z : |6x| < 5
14. 5x : x Z, |2x| ≤ 8
15. 5a+2b : a,b Z
16. 6a+2b : a,b Z

B. Viết mỗi tập hợp sau đây bằng ký hiệu tập hợp. 17. 2,4,8,16,32,64,... 23.

3,4,5,6,7,8 18. 0,4,16,36,64,100,... 24. 4, 3, 2, 1,0,1,2 19. ...,

6, 3,0,3,6,9,12,15,... 25. 20. ..., 8, 3,2,7,12,17,... 21. 0,1,4,9,16,25,36,...

22. 3,6,11,18,27,38,...

..., 1 1 1 8 , 4 , 2 1 1 1 ,1,2,4,8,...

26. ..., 27 , 9 , 3 ,1,3,9,27,...

27. ..., π, $\frac{\pi}{2}$,0, $\frac{\pi}{2}$,π, $\frac{3\pi}{}$,2π, $\frac{5\pi}{2}$,...

28. 3 ..., 2 , 4 3 ,0, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{4}$ 9 ,3, $\frac{15}{4}$ 9 , 2 ,...