CHƯƠNG 1

Tập hợp

Toàn bộ toán học đều có thể được mô tả bằng các tập hợp. Điều này sẽ ngày càng trở nên rõ ràng khi bạn tiến sâu hơn vào lĩnh vực này. Bạn sẽ thấy rõ điều đó trong hầu hết các khóa học cấp cao, và chắc chắn là trong khóa học này. Lý thuyết tập hợp là một ngôn ngữ hoàn hảo để mô tả và giải thích mọi loại cấu trúc toán học.

1.1 Giới thiệu về Tập hợp

Một **tập hợp** (set) là một nhóm các đối tượng. Các đối tượng này được gọi là **phần tử** (elements) của tập hợp. Chúng ta chủ yếu quan tâm đến các tập hợp mà phần tử của chúng là các thực thể toán học, chẳng hạn như các con số, điểm, hàm số, v.v.

Một tập hợp thường được biểu diễn bằng cách liệt kê các phần tử của nó, cách nhau bởi dấu phẩy và đặt trong cặp dấu ngoặc nhọn. Ví dụ, nhóm $\{2, 4, 6, 8\}$ là một tập hợp gồm bốn phần tử: các số 2, 4, 6 và 8. Một số tập hợp có vô số phần tử. Ví dụ, hãy xét nhóm tất cả các số nguyên,

$$\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Ở đây, dấu ba chấm chỉ ra một quy luật các con số kéo dài vô tận về cả hai phía âm và dương. Một tập hợp được gọi là **tập vô hạn** (infinite set) nếu nó có vô số phần tử; ngược lại, nó được gọi là **tập hữu hạn** (finite set).

Hai tập hợp được coi là **bằng nhau** (equal) nếu chúng chứa chính xác các phần tử giống nhau. Do đó $\{2, 4, 6, 8\} = \{4, 2, 8, 6\}$ vì dù thứ tự liệt kê khác nhau, các phần tử vẫn y hệt nhau; nhưng $\{2, 4, 6, 8\} \neq \{2, 4, 6, 7\}$. Tương tự,

$$\{\cdots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \ldots\}.$$

Chúng ta thường dùng các chữ cái in hoa để đặt tên cho tập hợp. Khi thảo luận về tập hợp $\{2, 4, 6, 8\}$, ta có thể khai báo $A = \{2, 4, 6, 8\}$ và sau đó dùng A để đại diện cho $\{2, 4, 6, 8\}$. Để diễn đạt rằng 2 là một phần tử của tập hợp A, ta viết $2 \in A$, và đọc là "2 là một phần tử của A", hoặc "2 thuộc A", hay đơn giản là "2 trong A". Ta cũng có $4 \in A$, $6 \in A$ và $8 \in A$, nhưng $5 \notin A$. Ta đọc biểu thức cuối cùng này là "5 không phải là một phần tử của A", hoặc "5 không thuộc A". Các cách viết như $6, 2 \in A$ hay $2, 4, 8 \in A$ được dùng để chỉ ra rằng có nhiều đối tượng cùng thuộc một tập hợp.

Một số tập hợp đóng vai trò quan trọng đến mức chúng ta dành riêng những ký hiệu đặc biệt cho chúng. Tập hợp các **số tự nhiên** (tức là các số nguyên dương) được ký hiệu là $\mathbb{N}$, cụ thể là,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}.$$

Tập hợp các **số nguyên**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

là một tập hợp cơ bản khác. Ký hiệu $\mathbb{R}$ đại diện cho tập hợp tất cả các **số thực**, một tập hợp chắc chắn đã rất quen thuộc với bạn từ môn giải tích. Các tập hợp đặc biệt khác sẽ được liệt kê ở phần sau của mục này.

Các phần tử của tập hợp không nhất thiết phải là những con số. Tập hợp $B = \{T, F\}$ gồm hai chữ cái, có thể đại diện cho các giá trị "đúng" (true) và "sai" (false). Tập hợp $C = \{a, e, i, o, u\}$ bao gồm các nguyên âm viết thường trong bảng chữ cái tiếng Anh. Tập hợp $D = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ có các phần tử là bốn điểm góc của một hình vuông trên mặt phẳng tọa độ x-y. Do đó $(0, 0) \in D$, $(1, 0) \in D$, v.v., nhưng $(1, 2) \notin D$ (chẳng hạn vậy). Thậm chí, một tập hợp có thể chứa các tập hợp khác làm phần tử. Xét $E = \{1, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$, tập hợp này có ba phần tử: số 1, tập hợp $\{2, 3\}$ và tập hợp $\{2, 4\}$. Vậy $1 \in E$ và $\{2, 3\} \in E$ và $\{2, 4\} \in E$. Nhưng lưu ý rằng $2 \notin E$, $3 \notin E$ và $4 \notin E$.

Xét tập hợp $M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ gồm ba ma trận kích thước 2x2. Ta có $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$, nhưng $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin M$. Các chữ cái có thể đóng vai trò là ký hiệu đại diện cho phần tử của một tập hợp: Nếu $a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, thì $M = \{a, b, c\}$.

Nếu X là một tập hữu hạn, **lực lượng** (cardinality) hay **kích thước** (size) của nó là số lượng phần tử mà nó chứa, và con số này được ký hiệu là $|X|$. Vậy đối với các tập hợp ở trên, $|A| = 4$, $|B| = 2$, $|C| = 5$, $|D| = 4$, $|E| = 3$ và $|M| = 3$.

Có một tập hợp đặc biệt, tuy nhỏ nhưng đóng vai trò rất lớn. **Tập rỗng** (empty set) là tập hợp $\{\}$ không chứa phần tử nào. Ta ký hiệu nó là $\emptyset$, do đó $\emptyset = \{\}$. Bất cứ khi nào bạn thấy ký hiệu $\emptyset$, nó đại diện cho $\{\}$. Hãy quan sát thấy rằng $|\emptyset| = 0$. Tập rỗng là tập hợp duy nhất có lực lượng bằng không.

Hãy cẩn thận khi viết tập rỗng. Đừng viết $\{\emptyset\}$ khi bạn muốn nói đến $\emptyset$. Hai tập hợp này không thể bằng nhau vì $\emptyset$ không chứa gì cả, trong khi $\{\emptyset\}$ chứa một thứ, đó chính là tập rỗng. Nếu điều này gây nhầm lẫn, hãy hình dung tập hợp như một chiếc hộp chứa đồ vật bên trong, ví dụ, $\{2, 4, 6, 8\}$ là một "chiếc hộp" chứa bốn con số. Tập rỗng $\emptyset = \{\}$ là một chiếc hộp trống không. Ngược lại, $\{\emptyset\}$ là một chiếc hộp có chứa một chiếc hộp trống bên trong nó. Rõ ràng là có sự khác biệt: Một chiếc hộp trống không hề giống với một chiếc hộp chứa một chiếc hộp trống bên trong. Do đó $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. (Bạn cũng có thể lưu ý rằng $|\emptyset| = 0$ và $|\{\emptyset\}| = 1$ như một bằng chứng bổ sung cho thấy $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.)

Sự liên tưởng đến những chiếc hộp này có thể giúp chúng ta hình dung về tập hợp. Tập hợp $F = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ trông có vẻ kỳ lạ nhưng thực ra rất đơn giản. Hãy coi nó như một chiếc hộp chứa ba thứ: một chiếc hộp trống, một chiếc hộp chứa một chiếc hộp trống, và một chiếc hộp chứa một chiếc hộp (mà bên trong chiếc hộp đó lại là một chiếc hộp trống). Vậy $|F| = 3$. Tập hợp $G = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ là một chiếc hộp chứa hai chiếc hộp: hộp số tự nhiên và hộp số nguyên. Vậy $|G| = 2$.

Một cách viết đặc biệt gọi là **ký hiệu chỉ ra tính chất đặc trưng** (set-builder notation) được sử dụng để mô tả những tập hợp quá lớn hoặc quá phức tạp để có thể liệt kê hết trong dấu ngoặc nhọn. Xét tập hợp vô hạn các số nguyên chẵn $E = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$. Bằng ký hiệu chỉ ra tính chất đặc trưng, tập hợp này được viết là

$$E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ta đọc dấu ngoặc nhọn mở đầu là "tập hợp tất cả các đối tượng có dạng", và dấu hai chấm là "sao cho". Vậy biểu thức $E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ được đọc là "E bằng tập hợp tất cả các đối tượng có dạng $2n$, sao cho n là một phần tử của $\mathbb{Z}$". Ý tưởng ở đây là E bao gồm tất cả các giá trị có thể có của $2n$, trong đó n nhận mọi giá trị trong $\mathbb{Z}$.

Nhìn chung, một tập hợp X được viết theo cách chỉ ra tính chất đặc trưng sẽ có cú pháp

$$X = \{\text{biểu thức} : \text{quy tắc}\},$$

trong đó các phần tử của X được hiểu là tất cả các giá trị của "biểu thức" được xác định bởi "quy tắc". Ví dụ, ở trên E là tập hợp tất cả các giá trị của biểu thức $2n$ thỏa mãn quy tắc $n \in \mathbb{Z}$. Có thể có nhiều cách để biểu diễn cùng một tập hợp. Ví dụ, $E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\} = \{n : n \text{ là một số nguyên chẵn}\} = \{n : n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$. Một cách viết phổ biến khác là

$$E = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ là số chẵn}\},$$

đọc là "E là tập hợp tất cả các số n thuộc $\mathbb{Z}$ sao cho n là số chẵn". Một số tác giả dùng dấu gạch đứng thay vì dấu hai chấm; ví dụ, $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ là số chẵn}\}$. Chúng ta sẽ sử dụng dấu hai chấm.

Ví dụ 1.1 Dưới đây là một số minh họa thêm về ký hiệu chỉ ra tính chất đặc trưng.

1. $\{n : n \text{ là số nguyên tố}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
2. $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ là số nguyên tố}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
3. $\{n^2 : n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
5. $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 2 = 0\} = \emptyset$
6. $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
7. $\{2x : x \in \mathbb{Z}, |x| < 4\} = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$
8. $\{x \in \mathbb{Z} : |2x| < 4\} = \{-1, 0, 1\}$

Các mục 6–8 ở trên làm nổi bật một sự trùng lặp về ký hiệu mà chúng ta phải luôn cảnh giác. Ký hiệu $|X|$ mang nghĩa là *giá trị tuyệt đối* nếu X là một con số, và là *lực lượng* nếu

X là một tập hợp. Sự phân biệt này luôn phải được làm rõ dựa vào ngữ cảnh. Xét $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\}$ trong Ví dụ 1.1 (6) ở trên. Ở đây $x \in \mathbb{Z}$, nên x là một con số (không phải tập hợp), và do đó các dấu gạch đứng trong $|x|$ phải mang nghĩa là giá trị tuyệt đối, chứ không phải lực lượng. Mặt khác, giả sử $A = \{\{1,2\},\{3,4,5,6\},\{7\}\}$ và $B = \{X \in A : |X| < 3\}$. Các phần tử của A là các tập hợp (không phải con số), vì vậy $|X|$ trong biểu thức của B phải mang nghĩa là lực lượng. Do đó $B = \{\{1,2\},\{7\}\}$.

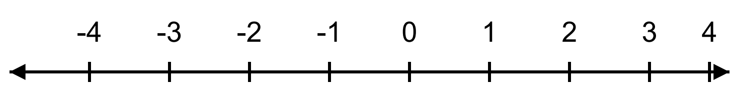
Ví dụ 1.2 Mô tả tập hợp $A = \{7a + 3b : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải: Tập hợp này chứa tất cả các số có dạng $7a + 3b$, trong đó a và b là các số nguyên. Mỗi số $7a + 3b$ như vậy đều là một số nguyên, nên A chỉ chứa các số nguyên. Nhưng đó là những số nguyên nào? Nếu n là một số nguyên bất kỳ, thì $n = 7n + 3(-2n)$, tức là $n = 7a + 3b$ với $a = n$ và $b = -2n$. Do đó $n \in A$. Đến đây, ta đã chứng minh được rằng A chỉ chứa các số nguyên, và đồng thời mọi số nguyên đều là một phần tử của A. Hệ quả là $A = \mathbb{Z}$.

Chúng ta khép lại phần này bằng một bản tóm tắt về các tập hợp đặc biệt. Đây là những tập hợp vô cùng phổ biến nên chúng được đặt tên và ký hiệu riêng.

- Tập rỗng: $\emptyset = \{\}$
- Các số tự nhiên: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- Các số nguyên: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- Các số hữu tỉ: $\mathbb{Q} = \left\{x : x = \frac{m}{n},\ \text{trong đó } m, n \in \mathbb{Z} \text{ và } n \neq 0\right\}$
- Các số thực: $\mathbb{R}$

Chúng ta hình dung tập hợp số thực $\mathbb{R}$ như một trục số dài vô tận.



Lưu ý rằng $\mathbb{Q}$ là tập hợp tất cả các số trong $\mathbb{R}$ có thể biểu diễn dưới dạng phân số của hai số nguyên. Bạn có thể đã biết rằng $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, vì $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ nhưng $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. (Nếu chưa rõ, điểm này sẽ được giải quyết ở Chương 6.)

Trong giải tích, bạn đã từng làm quen với các khoảng (interval) trên trục số. Giống như $\mathbb{R}$, đây cũng là những tập hợp số vô hạn. Bất kỳ hai số $a, b \in \mathbb{R}$ nào với $a < b$ đều tạo ra các khoảng khác nhau. Về mặt đồ họa, chúng được biểu diễn bằng một đoạn in đậm trên trục số giữa a và b. Một điểm tròn đặc tại đầu mút chỉ ra rằng con số đó được bao gồm trong khoảng. Một điểm tròn rỗng chỉ ra một điểm không được bao gồm trong khoảng.

- Đoạn (Closed interval): $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

- Khoảng (Open interval): $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

- Nửa khoảng (Half-open interval): $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

- Nửa khoảng (Half-open interval): $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

- Khoảng vô hạn (Infinite interval): $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

- Nửa khoảng vô hạn (Infinite interval): $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

- Khoảng vô hạn (Infinite interval): $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

- Nửa khoảng vô hạn (Infinite interval): $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

Mỗi khoảng/đoạn này đều là một tập vô hạn chứa vô số các con số làm phần tử. Ví dụ, mặc dù có độ dài ngắn, khoảng $(0.1, 0.2)$ vẫn chứa vô số con số, tức là tất cả các số nằm giữa 0,1 và 0,2. Thật không may là do sự trùng lặp ký hiệu, (a, b) có thể biểu thị cả một khoảng mở trên trục số lẫn một điểm trên mặt phẳng tọa độ. Sự khác biệt này thường được làm rõ thông qua ngữ cảnh. Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ thấy thêm một ý nghĩa nữa của (a, b).

Bài tập Phần 1.1

A. Viết các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của chúng trong dấu ngoặc nhọn.

1. $\{5x - 1 : x \in \mathbb{Z}\}$
9. $\{x \in \mathbb{R} : \sin \pi x = 0\}$
2. $\{3x + 2 : x \in \mathbb{Z}\}$
10. $\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 1\}$
3. $\{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x < 7\}$
11. $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5\}$
4. $\{x \in \mathbb{N} : -2 < x \leq 7\}$
12. $\{x \in \mathbb{Z} : |2x| < 5\}$
5. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\}$

13. $\{x \in \mathbb{Z} : |6x| < 5\}$

6. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$

14. $\{5x : x \in \mathbb{Z}, |2x| \leq 8\}$

7. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x = -6\}$

15. $\{5a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$

8. $\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 5x^2 = -6x\}$

16. $\{6a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$

B. Viết các tập hợp sau bằng ký hiệu chỉ ra tính chất đặc trưng.

17. $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}$

23. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

18. $\{0, 4, 16, 36, 64, 100, \ldots\}$

24. $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

19. $\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

25. $\{\ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots\}$

20. $\{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}$

26. $\{\ldots, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \ldots\}$

21. $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$

27. $\{\ldots, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, \ldots\}$

22. $\{3, 6, 11, 18, 27, 38, \ldots\}$

28. $\{\ldots, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, 3, \frac{15}{4}, \frac{9}{2}, \ldots\}$