CHAPTER 1

Tập hợp

Tất cả toán học đều có thể được mô tả bằng các tập hợp. Điều này càng trở nên rõ ràng hơn khi bạn càng đi sâu vào toán học. Nó sẽ hiển hiện trong hầu hết các khóa học cấp cao của bạn, và chắc chắn là trong khóa học này. Lý thuyết tập hợp là một ngôn ngữ hoàn toàn phù hợp để mô tả và giải thích mọi loại cấu trúc toán học.

1.1 Giới thiệu về Tập hợp

Một tập hợp là một bộ sưu tập các đối tượng. Các đối tượng này được gọi là các phần tử của tập hợp. Chúng ta chủ yếu quan tâm đến các tập hợp mà các phần tử của chúng là các thực thể toán học, chẳng hạn như các số, các điểm, các hàm số, v.v.

Một tập hợp thường được biểu diễn bằng cách liệt kê các phần tử của nó giữa các dấu phẩy, đặt trong cặp dấu ngoặc nhọn. Ví dụ, tập hợp $\{2, 4, 6, 8\}$ là một tập hợp có bốn phần tử, gồm các số 2, 4, 6 và 8. Một số tập hợp có vô số phần tử. Ví dụ, hãy xem xét tập hợp tất cả các số nguyên,

$$\{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}.$$

Ở đây, các dấu chấm biểu thị một quy luật của các con số kéo dài mãi mãi theo cả hai hướng dương và âm. Một tập hợp được gọi là tập hợp vô hạn nếu nó có vô số phần tử; ngược lại, nó được gọi là tập hợp hữu hạn.

Hai tập hợp bằng nhau nếu chúng chứa chính xác các phần tử giống nhau. Do đó $\{2, 4, 6, 8\} = \{4, 2, 8, 6\}$ bởi vì mặc dù chúng được liệt kê theo thứ tự khác nhau, các phần tử là giống hệt nhau; nhưng $\{2, 4, 6, 8\} \neq \{2, 4, 6, 7\}$. Ngoài ra

$$\{\ldots-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\ldots\} = \{0,-1,1,-2,2,-3,3,-4,4,\ldots\}.$$

Chúng ta thường dùng các chữ cái in hoa để đại diện cho các tập hợp. Khi thảo luận về tập hợp $\{2, 4, 6, 8\}$, chúng ta có thể khai báo $A = \{2, 4, 6, 8\}$ và sau đó dùng A để đại diện cho $\{2, 4, 6, 8\}$. Để diễn đạt rằng 2 là một phần tử của tập hợp A, chúng ta viết $2 \in A$, và đọc là "2 *is an element of* A," hoặc "2 *is in* A," hoặc chỉ đơn giản là "2 *in* A." Chúng ta cũng có $4 \in A$, $6 \in A$ và $8 \in A$, nhưng $5 \notin A$. Chúng ta đọc biểu thức cuối cùng này là "5 *is not an element of* A," hoặc "5 *not in* A." Các biểu thức như $6, 2 \in A$ hoặc $2, 4, 8 \in A$ được dùng để chỉ ra rằng có nhiều phần tử cùng nằm trong một tập hợp.

Một số tập hợp quan trọng đến mức chúng ta dành riêng các ký hiệu đặc biệt cho chúng. Tập hợp các số tự nhiên (tức là các số nguyên dương) được ký hiệu là $\mathbb{N}$, tức là,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}.$$

Tập hợp các số nguyên

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

là một tập hợp cơ bản khác. Ký hiệu $\mathbb{R}$ đại diện cho tập hợp tất cả các số thực, một tập hợp chắc chắn đã quen thuộc với bạn từ giải tích. Các tập hợp đặc biệt khác sẽ được liệt kê sau trong phần này.

Các tập hợp không nhất thiết chỉ có các con số là phần tử. Tập hợp $B = \{T, F\}$ bao gồm hai chữ cái, có lẽ đại diện cho các giá trị "đúng" và "sai". Tập hợp $C = \{a, e, i, o, u\}$ bao gồm các nguyên âm viết thường trong bảng chữ cái tiếng Anh. Tập hợp $D = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ có các phần tử là bốn điểm góc của một hình vuông trên mặt phẳng tọa độ x-y. Do đó $(0, 0) \in D$, $(1, 0) \in D$, v.v., nhưng $(1, 2) \notin D$ (chẳng hạn). Thậm chí một tập hợp có thể có các tập hợp khác làm phần tử. Xét $E = \{1, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$, tập hợp này có ba phần tử: số 1, tập hợp $\{2, 3\}$ và tập hợp $\{2, 4\}$. Do đó $1 \in E$ và $\{2, 3\} \in E$ và $\{2, 4\} \in E$. Nhưng lưu ý rằng $2 \notin E$, $3 \notin E$ và $4 \notin E$.

Xét tập hợp $M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ gồm ba ma trận cấp hai. Ta có $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$, nhưng $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin M$. Các chữ cái có thể đóng vai trò là các ký hiệu biểu diễn các phần tử của một tập hợp: Nếu $a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, thì $M = \{a, b, c\}$.

Nếu X là một tập hợp hữu hạn, lực lượng hoặc kích thước của nó là số lượng phần tử mà nó có, và số này được ký hiệu là $|X|$. Do đó, đối với các tập hợp trên, $|A| = 4$, $|B| = 2$, $|C| = 5$, $|D| = 4$, $|E| = 3$ và $|M| = 3$.

Có một tập hợp đặc biệt, tuy nhỏ nhưng đóng vai trò quan trọng. Tập hợp rỗng là tập hợp $\{\}$ không chứa phần tử nào. Chúng ta ký hiệu nó là $\emptyset$, do đó $\emptyset = \{\}$. Bất cứ khi nào bạn nhìn thấy ký hiệu $\emptyset$, nó có nghĩa là $\{\}$. Hãy quan sát rằng $|\emptyset| = 0$. Tập hợp rỗng là tập hợp duy nhất có lực lượng bằng không.

Hãy cẩn thận khi viết tập hợp rỗng. Đừng viết $\{\emptyset\}$ khi ý bạn là $\emptyset$. Những tập hợp này không thể bằng nhau vì $\emptyset$ không chứa gì cả, trong khi $\{\emptyset\}$ chứa một thứ, đó là tập hợp rỗng. Nếu điều này gây khó hiểu, hãy coi một tập hợp như một chiếc hộp chứa các đồ vật bên trong, ví dụ, $\{2, 4, 6, 8\}$ là một "chiếc hộp" chứa bốn con số. Tập hợp rỗng $\emptyset = \{\}$ là một chiếc hộp rỗng. Ngược lại, $\{\emptyset\}$ là một chiếc hộp có một chiếc hộp rỗng bên trong. Rõ ràng là có sự khác biệt: Một chiếc hộp rỗng không giống với một chiếc hộp có chứa một chiếc hộp rỗng bên trong. Vì vậy $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. (Bạn cũng có thể lưu ý $|\emptyset| = 0$ và $\big|\{\emptyset\}\big| = 1$ như là bằng chứng bổ sung rằng $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.)

Phép ẩn dụ về chiếc hộp này có thể giúp chúng ta suy nghĩ về các tập hợp. Tập h ợp $F = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ có vẻ lạ lẫm nhưng nó thực sự rất đơn giản. Hãy coi nó như một chiếc hộp chứa ba thứ: một chiếc hộp rỗng, một chiếc hộp chứa một chiếc hộp r ỗng, và một chiếc hộp chứa một chiếc hộp chứa một chiếc hộp rỗng. Do đó $|F| = 3$. Tập hợp $G = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ là một chiếc hộp chứa hai chiếc hộp, hộp chứa các số tự nhiên v à hộp chứa các số nguyên. Do đó $|G| = 2$.

Một ký hiệu đặc biệt được gọi là ký hiệu xây dựng tập hợp được sử dụng để mô t ả các tập hợp quá lớn hoặc phức tạp để liệt kê giữa các dấu ngoặc nhọn. Hãy xem xét tập hợp vô hạn các số nguyên chẵn $E = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$. Trong ký hiệu xây dựng tập hợp, tập hợp này được viết là

$$E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Chúng ta đọc dấu ngoặc nhọn đầu tiên là "*the set of all things of form*," và dấu h ai chấm là "*such that*." Vì vậy, biểu thức $E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ được đọc là " *E equals the set of all things of form 2n, such that n is an element of* $\mathbb{Z}$." Ý tưởng là E bao gồm tất cả các giá trị có thể có của $2n$, trong đó n nhận tất cả các gi á trị trong $\mathbb{Z}$.

Nói chung, một tập hợp X được viết bằng ký hiệu xây dựng tập hợp có cú pháp là

$$X = \{\text{expression} : \text{rule}\},$$

trong đó các phần tử của X được hiểu là tất cả các giá trị của "biểu thức" được xác đị nh bởi "quy tắc". Ví dụ, ở trên E là tập hợp tất cả các giá trị của biểu thức $2n$ thỏa m ãn quy tắc $n \in \mathbb{Z}$. Có thể có nhiều cách để biểu diễn cùng một tập hợp. Ví dụ, $E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\} = \{n : n$ là một số nguyên chẵn$\} = \{n : n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$. Một cách viết phổ biến khác là

$$E = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ is even}\},$$

đọc là "*E is the set of all n in* $\mathbb{Z}$ *such that n is even*." Một số tác giả sử dụng dấ u gạch đứng thay vì dấu hai chấm; ví dụ, $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n$ là số chẵn$\}$. Chúng tôi sử dụn g dấu hai chấm.

Ví dụ 1.1 Dưới đây là một số minh họa thêm về ký hiệu xây dựng tập hợp.

1. $\{n : n$ là một số nguyên tố$\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
2. $\{n \in \mathbb{N} : n$ là số nguyên tố$\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
3. $\{n^2 : n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ 4. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ 5. $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 2 = 0\} = \emptyset$ 6. $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 7. $\{2x : x \in \mathbb{Z}, |x| < 4\} = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$ 8. $\{x \in \mathbb{Z} : |2x| < 4\} = \{-1, 0, 1\}$

Các mục 6–8 ở trên làm nổi bật một sự xung đột về ký hiệu mà chúng ta phải luô n cảnh giác. Biểu thức $|X|$ có nghĩa là *absolute value* nếu X là một số và *cardinality* nếu X là một tập hợp. Sự phân biệt này phải luôn rõ ràng từ ngữ cảnh. Xét $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\}$ trong Ví dụ 1.1 (6) ở trên. Ở đây $x \in \mathbb{Z}$, vì vậy x là một số (không phải là một tập hợp), và do đó các dấu gạch dọc trong $|x|$ phải có nghĩa là giá trị tuyệ t đối, không phải là lực lượng. Mặt khác, giả sử $A = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{7\}\}$ và $B = \{X \in A : |X| < 3\}$. Các phần tử của A là các tập hợp (không phải là các số), vì vậ y $|X|$ trong biểu thức của B phải có nghĩa là lực lượng. Do đó $B = \{\{1, 2\}, \{7\}\}$.

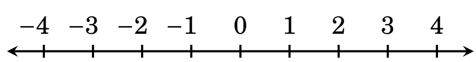
Ví dụ 1.2 Mô tả tập hợp $A = \{7a + 3b : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải: Tập hợp này chứa tất cả các số có dạng $7a + 3b$, trong đó a và b là các số n guyên. Mỗi số $7a + 3b$ như vậy là một số nguyên, vì vậy A chỉ chứa các số nguyên. Nhưng *which* các số nguyên? Nếu n là *any* số nguyên, thì $n = 7n + 3(-2n)$, nên $n = 7a + 3b$ trong đó $a = n$ và $b = -2n$. Do đó $n \in A$. Bây giờ chúng ta đã chỉ ra rằng A c hỉ chứa các số nguyên, và mọi số nguyên cũng là một phần tử của A. Kết quả là $A = \mathbb{Z}$.

Chúng tôi kết thúc phần này bằng một bản tóm tắt về các tập hợp đặc biệt. Đây l à những tập hợp phổ biến đến mức chúng được đặt tên và ký hiệu riêng.

- Tập hợp rỗng: $\emptyset = \{\}$
- Các số tự nhiên: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- Các số nguyên: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- Các số hữu tỉ: $\mathbb{Q} = \left\{x : x = \frac{m}{n}, \text{ trong đó } m, n \in \mathbb{Z} \text{ và } n \neq 0\right\}$
- Các số thực: $\mathbb{R}$

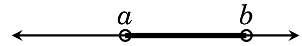
Chúng ta hình dung tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ như một trục số dài vô tận.

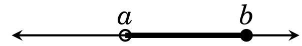


Lưu ý rằng $\mathbb{Q}$ là tập hợp tất cả các số trong $\mathbb{R}$ có thể được biểu diễn dưới dạng ph ân số của hai số nguyên. Có thể bạn đã biết rằng $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, vì $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ nhưng $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. (Nế u không, vấn đề này sẽ được đề cập trong Chương 6.)

Trong giải tích, bạn đã gặp các khoảng trên trục số. Giống như $\mathbb{R}$, đây cũng là cá c tập hợp số vô hạn. Hai số bất kỳ $a, b \in \mathbb{R}$ với $a < b$ tạo ra các khoảng khác nhau. V ề mặt đồ thị, chúng được biểu diễn bằng một đoạn tô đậm trên trục số giữa a và b. M ột vòng tròn đặc tại một điểm mút cho biết số đó được bao gồm trong khoảng. Một v òng tròn rỗng cho biết một điểm không được bao gồm trong khoảng.

- Khoảng đóng: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ 

- Khoảng mở: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ 

- Nửa khoảng: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ 

- Nửa khoảng: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ 

- Khoảng vô hạn: $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ 

- Khoảng vô hạn: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ 

- Khoảng vô hạn: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ 

- Khoảng vô tận: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ 

Mỗi khoảng này là một tập hợp vô hạn chứa vô số các số dưới dạng các phần tử. Ví dụ, mặc dù độ dài của nó ngắn, khoảng (0.1, 0.2) chứa vô số các số, tức là tất cả c ác số nằm giữa 0.1 và 0.2. Thật là một sự trùng hợp ký hiệu không may khi (a, b) có thể biểu thị cả một khoảng mở trên đường thẳng và một điểm trên mặt phẳng. Sự khá c biệt thường rõ ràng từ ngữ cảnh. Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ thấy thêm một ý nghĩa khác của (a, b).

Bài tập cho Mục 1.1

A. Hãy viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của chúng trong dấu ngoặc nhọn.

1. $\{5x-1 : x \in \mathbb{Z}\}$ 2. $\{3x+2 : x \in \mathbb{Z}\}$ 3. $\{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x < 7\}$ 4. $\{x \in \mathbb{N} : -2 < x \leq 7\}$ 5. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\}$ 6. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$ 7. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x = -6\}$ 8. $\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 5x^2 = -6$ 9. $\{x \in \mathbb{R} : \sin \pi x = 0\}$ 10. $\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 1\}$ 11. $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5\}$ 12. $\{x \in \mathbb{Z} : |2x| < 5\}$ 13. $\{x \in \mathbb{Z} : |6x| < 5\}$ 14. $\{5x : x \in \mathbb{Z}, |2x| \leq 8\}$ 15. $\{5a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ 16. $\{6a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$

B. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng ion.

17. $\{2,4,8,16,32,64,...\}$ 18. $\{0,4,16,36,64,100,...\}$ 19. $\{...,-6,-3,0,3,6,9,12,15,...\}$ 20. $\{...,-8,-3,2,7,12,17,...\}$ 21. $\{0,1,4,9,16,25,36,...\}$ 22. $\{3,6,11,18,27,38,...$ 23. $\{3,4,5,6,7,8\}$ 24. $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$ 25. $\{..., \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1,2,4,8,...\}$ 26. $\{..., \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1,3,9,27,...\}$ 27. $\{..., -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, ...\}$ 28. $\{..., -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, 3, \frac{15}{4}, \frac{9}{2}, ...\}$

}