

bộ

Tất cả toán học có thể được mô tả bằng tập hợp. Điều này càng trở nên rõ ràng hơn khi bạn đi sâu hơn vào toán học. Nó sẽ được thể hiện rõ ràng trong hầu hết các khóa học cấp cao hơn của bạn và chắc chắn là trong khóa học này. Lý thuyết tập hợp là một ngôn ngữ hoàn toàn phù hợp để mô tả và giải thích tất cả các loại cấu trúc toán học.

1.1 Giới thiệu về Bộ

Một bộ là một tập hợp các sự vật. Những thứ được gọi là phần tử của tập hợp. Chúng ta chủ yếu quan tâm đến các tập hợp có các phần tử là các thực thể toán học, chẳng hạn như số, điểm, hàm, v.v.

Một tập hợp thường được biểu diễn bằng cách liệt kê các phần tử của nó giữa các dấu phẩy, được bao bọc bởi dấu ngoặc nhọn. Ví dụ: tập hợp $\{2, 4, 6, 8\}$ là một tập hợp có bốn phần tử là các số 2, 4, 6 và 8. Một số tập hợp có vô số phần tử. Ví dụ, hãy xem xét tập hợp tất cả các số nguyên,

$$\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Ở đây các dấu chấm biểu thị một dãy số tiếp tục mãi mãi theo cả chiều dương và chiều âm. Một tập hợp được gọi là tập hợp vô hạn nếu nó có vô số phần tử; ngược lại nó được gọi là một tập hợp hữu hạn.

Hai tập hợp bằng nhau nếu chúng chứa các phần tử giống hệt nhau. Do đó $\{2, 4, 6, 8\} = \{4, 2, 8, 6\}$ vì mặc dù chúng được liệt kê theo thứ tự khác nhau nhưng các phần tử vẫn giống hệt nhau; nhưng $\{2, 4, 6, 8\} \neq \{2, 4, 6, 7\}$. Cũng

$$\{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots\}.$$

Chúng ta thường để chữ in hoa thay cho tập hợp. Khi thảo luận về tập $\{2, 4, 6, 8\}$, chúng ta có thể khai báo $A = \{2, 4, 6, 8\}$ rồi sử dụng A để thay thế cho $\{2, 4, 6, 8\}$. Để biểu thị rằng 2 là một phần tử của tập hợp A , chúng ta viết $2 \in A$ và đọc là “2 is an element of A ,” hoặc “2 is in A ,” hoặc chỉ “2 in A .” Chúng ta cũng có $4 \in A$, $6 \in A$ và $8 \in A$, nhưng có $5 \notin A$. Chúng ta đọc biểu thức cuối cùng này là “5 is not an element of A ” hoặc “5 not in A ”. Các biểu thức như $6, 2 \in A$ hoặc $2, 4, 8 \in A$ được dùng để biểu thị rằng có nhiều thứ nằm trong một tập hợp.

Một số bộ quan trọng đến mức chúng tôi dành những ký hiệu đặc biệt cho chúng. Tập hợp các số tự nhiên (tức là các số nguyên dương) được ký hiệu là \mathbb{N} , nghĩa là

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}.$$

Tập hợp số nguyên

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

là một tập hợp cơ bản khác. Ký hiệu \mathbb{R} là viết tắt của tập hợp tất cả các số thực, một tập hợp chắc chắn quen thuộc với bạn trong môn giải tích. Các bộ đặc biệt khác sẽ được liệt kê sau trong phần này.

Các bộ không nhất thiết chỉ có các số làm phần tử. Tập hợp $B = \{T, F\}$ bao gồm hai chữ cái, có thể đại diện cho các giá trị “true” và “false”. Tập hợp $C = \{a, e, i, o, u\}$ bao gồm các nguyên âm viết thường trong bảng chữ cái tiếng Anh. Tập hợp $D = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ có các phần tử là bốn điểm góc của hình vuông trên mặt phẳng tọa độ x - y . Do đó $(0, 0) \in D$, $(1, 0) \in D$, v.v., nhưng $(1, 2) \notin D$ (chẳng hạn). Thậm chí có khả năng một tập hợp có các tập hợp khác làm phần tử. Hãy xem xét $E = \{1, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$, có ba phần tử: số 1, tập hợp $\{2, 3\}$ và tập hợp $\{2, 4\}$. Do đó $1 \in E$ và $\{2, 3\} \in E$ và $\{2, 4\} \in E$. Nhưng lưu ý rằng $2 \notin E$, $3 \notin E$ và $4 \notin E$.

Xét tập $M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ của ba ma trận hai nhân hai. Chúng ta có $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ nhưng có $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin M$. Các chữ cái có thể đóng vai trò là ký hiệu biểu thị các phần tử của tập hợp: Nếu $a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ thì $M = \{a, b, c\}$.

Nếu X là một tập hữu hạn, số phần tử hoặc kích thước của nó là số phần tử mà nó có và số này được ký hiệu là $|X|$. Do đó, đối với các tập hợp trên, $|A| = 4$, $|B| = 2$, $|C| = 5$, $|D| = 4$, $|E| = 3$ và $|M| = 3$.

Có một bộ đặc biệt, tuy nhỏ nhưng lại đóng một vai trò lớn. Tập trống là tập $\{\}$ không có phần tử nào. We denote it as \emptyset , so $\emptyset = \{\}$. Bất cứ khi nào bạn nhìn thấy ký hiệu \emptyset , nó là viết tắt của $\{\}$. Quan sát $|\emptyset| = 0$. Tập trống là tập duy nhất có số lượng bằng 0.

Hãy cẩn thận khi viết tập hợp trống. Đừng viết $\{\emptyset\}$ khi ý bạn là \emptyset . Các tập hợp này không thể bằng nhau vì \emptyset không chứa gì trong khi $\{\emptyset\}$ chỉ chứa một thứ, đó là tập trống. Nếu điều này gây nhầm lẫn, hãy coi một tập hợp như một chiếc hộp chứa các thứ bên trong, chẳng hạn như $\{2, 4, 6, 8\}$ là một “hộp” chứa bốn số. Tập rỗng $\emptyset = \{\}$ là một hộp rỗng. Ngược lại, $\{\emptyset\}$ là một cái hộp có một cái hộp trống bên trong. Rõ ràng là có sự khác biệt: Hộp rỗng không giống hộp có hộp rỗng bên trong. Như vậy $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. (Bạn cũng có thể lưu ý $|\emptyset| = 0$ và $|\{\emptyset\}| = 1$ để làm bằng chứng bổ sung cho $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.)

Sự tương tự với chiếc hộp này có thể giúp chúng ta nghĩ về các tập hợp. Tập $F = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ nhìn có vẻ lạ nhưng thực ra rất đơn giản. Hãy tưởng tượng nó như một cái hộp chứa ba thứ: một cái hộp rỗng, một cái hộp chứa một cái hộp rỗng, và một cái hộp chứa một cái hộp chứa một cái hộp rỗng. Do đó $|F| = 3$. Tập $G = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ là một hộp chứa hai hộp, hộp số tự nhiên và hộp số nguyên. Do đó $|G| = 2$.

Một ký hiệu đặc biệt gọi là ký hiệu set-builder được sử dụng để mô tả các tập hợp quá lớn hoặc phức tạp để liệt kê giữa các dấu ngoặc nhọn. Xét tập vô hạn các số nguyên chẵn $E = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$. Trong ký hiệu set-builder, tập hợp này được viết là

$$E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Chúng ta đọc dấu ngoặc nhọn đầu tiên là “*the set of all things of form*” và dấu hai chấm là “*such that*”. Vì vậy, biểu thức $E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ đọc là “*E equals the set of all things of form $2n$, such that n is an element of \mathbb{Z} .*” Ý tưởng là E bao gồm tất cả các giá trị có thể có của $2n$, trong đó n đảm nhận tất cả các giá trị trong \mathbb{Z} .

Nói chung, một tập hợp X được viết bằng ký hiệu set-builder có cú pháp

$$X = \{\text{expression} : \text{rule}\},$$

trong đó các phần tử của X được hiểu là tất cả các giá trị của “biểu thức” được chỉ định bởi “quy tắc”. Ví dụ: ở trên E là tập hợp tất cả các giá trị của biểu thức $2n$ thỏa mãn quy tắc $n \in \mathbb{Z}$. Có thể có nhiều cách để diễn đạt cùng một tập hợp. Ví dụ: $E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\} = \{n : n \text{ là số nguyên chẵn}\} = \{n : n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$. Một cách viết phổ biến khác là

$$E = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ is even}\},$$

đọc “*E is the set of all n in \mathbb{Z} such that n is even.*” Một số người viết sử dụng dấu gạch ngang thay vì dấu hai chấm; ví dụ: $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ là chẵn}\}$. Chúng tôi sử dụng dấu hai chấm.

Ví dụ 1.1 Dưới đây là một số minh họa thêm về ký hiệu set-builder.

1. $\{n : n \text{ là số nguyên tố}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ 2.
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ là số nguyên tố}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ 3.
- $\{n^2 : n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ 4. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\}$
- $= \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ 5. $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 2 = 0\} = \emptyset$ 6. $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\}$
- $= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 7. $\{2x : x \in \mathbb{Z}, |x| < 4\} = \{-6,$
- $-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$ 8. $\{x \in \mathbb{Z} : |2x| < 4\} = \{-1, 0, 1\}$

Các mục 6–8 ở trên nêu bật một xung đột về ký hiệu mà chúng ta phải luôn cảnh giác. Biểu thức $|X|$ có nghĩa là *absolute value* nếu X là một số và *cardinality* nếu X là một tập hợp. Sự khác biệt phải luôn rõ ràng từ bối cảnh. Xét $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\}$ trong Ví dụ 1.1 (6) ở trên. Ở đây $x \in \mathbb{Z}$, vì vậy x là một số (không phải một tập hợp) và do đó các thành trong $|x|$ phải có nghĩa là giá trị tuyệt đối, không phải số lượng phần tử. Mặt khác, giả sử $A = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{7\}\}$ và $B = \{X \in A : |X| < 3\}$. Các phần tử của A là các tập hợp (không phải số), vì vậy $|X|$ trong biểu thức của B phải có nghĩa là số lượng phần tử. Do đó $B = \{\{1, 2\}, \{7\}\}$.

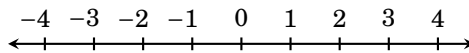
Ví dụ 1.2 Mô tả tập $A = \{7a + 3b : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Giải: Tập hợp này chứa tất cả các số có dạng $7a + 3b$, trong đó a và b là số nguyên. Mỗi số $7a + 3b$ như vậy là một số nguyên nên A chỉ chứa các số nguyên. Nhưng *which* số nguyên? Nếu n là số nguyên *any* thì $n = 7n + 3(-2n)$, vậy $n = 7a + 3b$ trong đó $a = n$ và $b = -2n$. Do đó $n \in A$. Bây giờ chúng ta đã chỉ ra rằng A chỉ chứa các số nguyên và mỗi số nguyên cũng là một phần tử của A . Do đó $A = \mathbb{Z}$.

Chúng tôi kết thúc phần này bằng một bản tóm tắt các bộ đặc biệt. Đây là những bộ phổ biến đến mức chúng được đặt tên và ký hiệu đặc biệt.









- Tập trống: $\emptyset = \{\}$
- Các số tự nhiên: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- Các số nguyên: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- Các số hữu tỉ: $\mathbb{Q} = \left\{x : x = \frac{m}{n}, \text{ trong đó } m, n \in \mathbb{Z} \text{ và } n \neq 0\right\}$
- Số thực: \mathbb{R}

Chúng ta hình dung tập \mathbb{R} số thực dưới dạng một dãy số dài vô hạn.



Lưu ý rằng \mathbb{Q} là tập hợp tất cả các số trong \mathbb{R} có thể được biểu diễn dưới dạng phân số của hai số nguyên. Bạn có thể biết rằng $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, là $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ nhưng $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. (Nếu không, điểm này sẽ được đề cập ở Chương 6.)

Trong giải tích bạn gặp phải các khoảng trên trục số. Giống như \mathbb{R} , đây cũng là những tập hợp số vô hạn. Hai số bất kỳ $a, b \in \mathbb{R}$ với $a < b$ đều tạo ra các khoảng khác nhau. Về mặt đồ họa, chúng được thể hiện bằng một đoạn tối trên trục số giữa a và b . Một vòng tròn liên nét tại điểm cuối cho biết số đó được bao gồm trong khoảng. Vòng tròn rỗng biểu thị một điểm không nằm trong khoảng.

- Khoảng thời gian đóng: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ 
- Khoảng mở: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ 
- Khoảng thời gian nửa mở: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ 
- Khoảng thời gian nửa mở: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ 
- Khoảng vô hạn: $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ 
- Khoảng vô hạn: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ 
- Khoảng vô hạn: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ 
- Khoảng vô hạn: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ 

Mỗi khoảng này là một tập vô hạn chứa vô số số làm phần tử. Ví dụ, mặc dù độ dài của nó ngắn nhưng khoảng $(0,1, 0,2)$ chứa vô số số, nghĩa là tất cả các số nằm trong khoảng từ 0,1 đến 0,2. Thật là một sự trùng hợp đáng tiếc về mặt ký hiệu khi (a, b) có thể biểu thị cả một khoảng mở trên đường thẳng và một điểm trên mặt phẳng. Sự khác biệt thường rõ ràng từ bối cảnh. Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ thấy một ý nghĩa khác của (a, b) .

Bài tập cho phần 1.1

A. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của chúng giữa các dấu ngoặc nhọn.

1. $\{5x - 1 : x \in \mathbb{Z}\}$ 2. $\{3x + 2 : x \in \mathbb{Z}\}$ 3. $\{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x < 7\}$ 4. $\{x \in \mathbb{N} : -2 < x \leq 7\}$ 5. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\}$ 6. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$ 7. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x = -6\}$ 8. $\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 5x^2 = -6\}$ 9. $\{x \in \mathbb{R} : \sin \pi x = 0\}$ 10. $\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 1\}$ 11. $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5\}$ 12. $\{x \in \mathbb{Z} : |2x| < 5\}$ 13. $\{x \in \mathbb{Z} : |6x| < 5\}$ 14. $\{5x : x \in \mathbb{Z}, |2x| \leq 8\}$ 15. $\{5a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ 16. $\{6a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$

B. Viết mỗi tập hợp sau đây bằng ký hiệu set-builder ion.

17. $\{2,4,8,16,32,64,\dots\}$ 18. $\{0,4,16,36,64,100,\dots\}$ 19. $\{\dots,-6,-3,0,3,6,9,12,15,\dots\}$ 20. $\{\dots,-8,-3,2,7,12,17,\dots\}$ 21. $\{0,1,4,9,16,25,36,\dots\}$ 22. $\{3,6,11,18,27,38,\dots\}$ 23. $\{3,4,5,6,7,8\}$ 24. $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$ 25. $\{\dots,\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4,8,\dots\}$ 26. $\{\dots,\frac{1}{27},\frac{1}{9},\frac{1}{3},1,3,9,27,\dots\}$ 27. $\{\dots,-\pi,-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi,\frac{5\pi}{2},\dots\}$ 28. $\{\dots,-\frac{3}{2},-\frac{3}{4},0,\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{9}{4},\frac{15}{4},\frac{9}{2},\dots\}$

}