

## Tập hợp

Toàn bộ toán học đều có thể được mô tả bằng các tập hợp. Điều này ngày càng trở nên rõ ràng hơn khi bạn đi sâu vào toán học. Nó sẽ được thể hiện rõ trong hầu hết các khóa học nâng cao của bạn, và chắc chắn là trong khóa học này. Lý thuyết tập hợp là một ngôn ngữ hoàn toàn phù hợp để mô tả và giải thích mọi loại cấu trúc toán học.

### 1.1 Giới thiệu về Tập hợp

Một tập hợp là một tập các đối tượng. Các đối tượng này được gọi là các phần tử của tập hợp. Chúng ta chủ yếu quan tâm đến các tập hợp mà phần tử của chúng là các thực thể toán học, chẳng hạn như số, điểm, hàm số, v.v.

Một tập hợp thường được biểu diễn bằng cách liệt kê các phần tử của nó, ngăn cách bởi dấu phẩy và đặt trong dấu ngoặc nhọn. Ví dụ, tập  $\{2, 4, 6, 8\}$  là một tập hợp có bốn phần tử, là các số 2, 4, 6 và 8. Một số tập hợp có vô số phần tử. Ví dụ, xét tập hợp tất cả các số nguyên,

$$\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Ở đây, các dấu chấm biểu thị một quy luật các con số kéo dài vô tận về cả hai hướng dương và âm. Một tập hợp được gọi là tập vô hạn nếu nó có vô số phần tử; ngược lại, nó được gọi là tập hữu hạn.

Hai tập hợp bằng nhau nếu chúng chứa chính xác các phần tử giống nhau. Do đó  $\{2, 4, 6, 8\} = \{4, 2, 8, 6\}$  vì mặc dù được liệt kê theo thứ tự khác nhau, các phần tử vẫn giống hệt nhau; nhưng  $\{2, 4, 6, 8\} \neq \{2, 4, 6, 7\}$ . Ngoài ra

$$\{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots\}.$$

Chúng ta thường dùng các chữ cái in hoa để đại diện cho các tập hợp. Khi thảo luận về tập hợp  $\{2, 4, 6, 8\}$ , chúng ta có thể khai báo  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  và sau đó sử dụng  $A$  để đại diện cho  $\{2, 4, 6, 8\}$ . Để biểu diễn rằng 2 là một phần tử của tập hợp  $A$ , chúng ta viết  $2 \in A$ , và đọc là “2 is an element of  $A$ ,” hoặc “2 is in  $A$ ,” hoặc chỉ đơn giản là “2 in  $A$ .” Chúng ta cũng có  $4 \in A$ ,  $6 \in A$  và  $8 \in A$ , nhưng  $5 \notin A$ . Chúng ta đọc biểu thức cuối cùng này là “5 is not an element of  $A$ ,” hoặc “5 not in  $A$ .” Các biểu thức như  $6, 2 \in A$  hoặc  $2, 4, 8 \in A$  được sử dụng để chỉ ra rằng có một vài phần tử nằm trong một tập hợp.

Một số tập hợp quan trọng đến mức chúng ta dành riêng các ký hiệu đặc biệt cho chúng. Tập hợp các số tự nhiên (tức là các số nguyên dương) được ký hiệu là  $\mathbb{N}$ , nghĩa là,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}.$$

Tập hợp các số nguyên

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

là một tập hợp cơ bản khác. Ký hiệu  $\mathbb{R}$  đại diện cho tập hợp tất cả các số thực, một tập hợp chắc hẳn đã quen thuộc với bạn từ môn giải tích. Các tập hợp đặc biệt khác sẽ được liệt kê ở phần sau của mục này.

Tập hợp không nhất thiết chỉ có các phần tử là số. Tập hợp  $B = \{T, F\}$  gồm hai chữ cái, có thể đại diện cho các giá trị "đúng" và "sai". Tập hợp  $C = \{a, e, i, o, u\}$  gồm các nguyên âm viết thường trong bảng chữ cái tiếng Anh. Tập hợp  $D = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$  có các phần tử là bốn đỉnh của một hình vuông trên mặt phẳng tọa độ  $x$ - $y$ . Do đó  $(0, 0) \in D$ ,  $(1, 0) \in D$ , v.v., nhưng  $(1, 2) \notin D$  (chẳng hạn). Thậm chí một tập hợp có thể chứa các tập hợp khác làm phần tử. Xét  $E = \{1, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$ , tập hợp này có ba phần tử: số 1, tập hợp  $\{2, 3\}$  và tập hợp  $\{2, 4\}$ . Do đó  $1 \in E$  và  $\{2, 3\} \in E$  và  $\{2, 4\} \in E$ . Nhưng lưu ý rằng  $2 \notin E$ ,  $3 \notin E$  và  $4 \notin E$ .

Xét tập hợp  $M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  gồm ba ma trận cấp 2. Ta có  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ , nhưng  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin M$ . Các chữ cái có thể được dùng làm ký hiệu biểu thị các phần tử của một tập hợp: Nếu  $a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  và  $c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , thì  $M = \{a, b, c\}$ .

Nếu  $X$  là một tập hợp hữu hạn, lực lượng hoặc kích thước của nó là số phần tử mà nó có, và số này được ký hiệu là  $|X|$ . Do đó, đối với các tập hợp ở trên,  $|A| = 4$ ,  $|B| = 2$ ,  $|C| = 5$ ,  $|D| = 4$ ,  $|E| = 3$  và  $|M| = 3$ .

Có một tập hợp đặc biệt, tuy nhỏ nhưng đóng vai trò rất lớn. Tập hợp rỗng là tập hợp  $\{\}$  không có phần tử nào. Ta ký hiệu nó là  $\emptyset$ , do đó  $\emptyset = \{\}$ . Bất cứ khi nào bạn thấy ký hiệu  $\emptyset$ , nó đại diện cho  $\{\}$ . Để ý rằng  $|\emptyset| = 0$ . Tập hợp rỗng là tập hợp duy nhất có lực lượng bằng không.

Hãy cẩn thận khi viết tập hợp rỗng. Đừng viết  $\{\emptyset\}$  khi ý bạn là  $\emptyset$ . Các tập hợp này không thể bằng nhau vì  $\emptyset$  không chứa gì cả trong khi  $\{\emptyset\}$  chứa một phần tử, cụ thể là tập hợp rỗng. Nếu điều này khó hiểu, hãy hình dung một tập hợp như một chiếc hộp chứa các đồ vật bên trong, ví dụ,  $\{2, 4, 6, 8\}$  là một "chiếc hộp" chứa bốn con số. Tập hợp rỗng  $\emptyset = \{\}$  là một chiếc hộp rỗng. Ngược lại,  $\{\emptyset\}$  là một chiếc hộp có một chiếc hộp rỗng bên trong nó. Rõ ràng là có sự khác biệt: Một chiếc hộp rỗng không giống với một chiếc hộp có chứa một chiếc hộp rỗng bên trong. Do đó  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ . (Bạn cũng có thể lưu ý  $|\emptyset| = 0$  và  $|\{\emptyset\}| = 1$  như một bằng chứng bổ sung cho thấy  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ .)

Cách ví von về chiếc hộp này có thể giúp chúng ta hình dung về các tập hợp. Tập hợp  $F = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$  có thể trông kỳ lạ nhưng thực ra lại rất đơn giản. Hãy coi nó như một chiếc hộp chứa ba thứ: một chiếc hộp rỗng, một chiếc hộp chứa một chiếc hộp rỗng, và một chiếc hộp chứa một chiếc hộp chứa một chiếc hộp rỗng. Do đó  $|F| = 3$ . Tập hợp  $G = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$  là một chiếc hộp chứa hai chiếc hộp, hộp số tự nhiên và hộp số nguyên. Do đó  $|G| = 2$ .

Một ký hiệu đặc biệt gọi là ký hiệu xây dựng tập hợp được sử dụng để mô tả các tập hợp quá lớn hoặc phức tạp để liệt kê giữa các dấu ngoặc nhọn. Xét tập hợp vô hạn các số nguyên chẵn  $E = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ . Dưới dạng ký hiệu xây dựng tập hợp, tập hợp này được viết là

$$E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Chúng ta đọc dấu ngoặc nhọn đầu tiên là “*the set of all things of form,*” và dấu hai chấm là “*such that.*” Vì vậy, biểu thức  $E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$  được đọc là “*E equals the set of all things of form  $2n$ , such that  $n$  is an element of  $\mathbb{Z}$ .*” Ý tưởng là  $E$  bao gồm tất cả các giá trị có thể có của  $2n$ , trong đó  $n$  nhận tất cả các giá trị trong  $\mathbb{Z}$ .

Nhìn chung, một tập hợp  $X$  được viết bằng ký hiệu xây dựng tập hợp có cú pháp

$$X = \{\text{expression} : \text{rule}\},$$

trong đó các phần tử của  $X$  được hiểu là tất cả các giá trị của “biểu thức” được xác định bởi “quy tắc”. Ví dụ,  $E$  ở trên là tập hợp tất cả các giá trị của biểu thức  $2n$  thỏa mãn quy tắc  $n \in \mathbb{Z}$ . Có thể có nhiều cách để biểu diễn cùng một tập hợp. Ví dụ,  $E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\} = \{n : n \text{ là một số nguyên chẵn}\} = \{n : n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ . Một cách viết phổ biến khác là

$$E = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ is even}\},$$

đọc là “*E is the set of all  $n$  in  $\mathbb{Z}$  such that  $n$  is even.*” Một số tác giả dùng dấu gạch đứng thay cho dấu hai chấm; ví dụ,  $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ là số chẵn}\}$ . Chúng tôi sử dụng dấu hai chấm.

Ví dụ 1.1 Dưới đây là một số minh họa thêm về ký hiệu xây dựng tập hợp.

1.  $\{n : n \text{ là một số nguyên tố}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$
2.  $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ là số nguyên tố}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$
3.  $\{n^2 : n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$  4.  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$  5.  $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 2 = 0\} = \emptyset$  6.  $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  7.  $\{2x : x \in \mathbb{Z}, |x| < 4\} = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$  8.  $\{x \in \mathbb{Z} : |2x| < 4\} = \{-1, 0, 1\}$

Các mục 6–8 ở trên nêu bật một sự mâu thuẫn về ký hiệu mà chúng ta phải luôn luôn ý. Biểu thức  $|X|$  có nghĩa là *absolute value* nếu  $X$  là một số và là *cardinality* nếu  $X$  là một tập hợp. Sự phân biệt này luôn phải rõ ràng dựa vào ngữ cảnh. Xét  $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\}$  trong Ví dụ 1.1 (6) ở trên. Ở đây  $x \in \mathbb{Z}$ , nên  $x$  là một số (không phải tập hợp), và do đó dấu gạch đứng trong  $|x|$  phải có nghĩa là giá trị tuyệt đối, chứ không phải lực lượng. Mặt khác, giả sử  $A = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{7\}\}$  và  $B = \{X \in A : |X| < 3\}$ . Các phần tử của  $A$  là các tập hợp (không phải số), nên  $|X|$  trong biểu thức của  $B$  phải có nghĩa là lực lượng. Do đó  $B = \{\{1, 2\}, \{7\}\}$ .

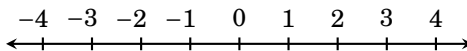
Ví dụ 1.2 Mô tả tập hợp  $A = \{7a + 3b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

Lời giải: Tập hợp này chứa tất cả các số có dạng  $7a + 3b$ , trong đó  $a$  và  $b$  là các số nguyên. Mỗi số  $7a + 3b$  như vậy là một số nguyên, do đó  $A$  chỉ chứa các số nguyên. Nhưng *which* số nguyên? Nếu  $n$  là *any* số nguyên, thì  $n = 7n + 3(-2n)$ , do đó  $n = 7a + 3b$  trong đó  $a = n$  và  $b = -2n$ . Vì vậy  $n \in A$ . Bây giờ chúng ta đã chứng minh được rằng  $A$  chỉ chứa các số nguyên, và đồng thời mọi số nguyên đều là một phần tử của  $A$ . Do vậy  $A = \mathbb{Z}$ .

Chúng ta kết thúc phần này bằng một bản tóm tắt về các tập hợp đặc biệt. Đây là những tập hợp rất phổ biến đến mức chúng được đặt tên và ký hiệu đặc biệt.









- Tập rỗng:  $\emptyset = \{\}$
- Các số tự nhiên:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- Các số nguyên:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- Các số hữu tỉ:  $\mathbb{Q} = \left\{x : x = \frac{m}{n}, \text{ trong đó } m, n \in \mathbb{Z} \text{ và } n \neq 0\right\}$
- Số thực:  $\mathbb{R}$

Chúng ta hình dung tập hợp các số thực  $\mathbb{R}$  như một trục số dài vô hạn.



Lưu ý rằng  $\mathbb{Q}$  là tập hợp tất cả các số trong  $\mathbb{R}$  có thể được biểu diễn dưới dạng phân số của hai số nguyên. Có thể bạn đã biết rằng  $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ , vì  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  nhưng  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ . (Nếu chưa, vấn đề này sẽ được đề cập trong Chương 6.)

Trong giải tích, bạn đã gặp các khoảng trên trục số. Giống như  $\mathbb{R}$ , chúng cũng là các tập hợp số vô hạn. Bất kỳ hai số  $a, b \in \mathbb{R}$  nào với  $a < b$  đều tạo ra các khoảng khác nhau. Về mặt đồ thị, chúng được biểu diễn bằng một đoạn tô đậm trên trục số giữa  $a$  và  $b$ . Một chấm tròn đặc tại một điểm nút biểu thị rằng số đó thuộc khoảng. Một chấm tròn rỗng biểu thị một điểm không thuộc khoảng.

- Khoảng đóng:  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  
- Khoảng mở:  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  
- Nửa khoảng:  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  
- Nửa khoảng:  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  
- Khoảng vô hạn:  $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$  
- Khoảng vô hạn:  $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$  
- Khoảng vô hạn:  $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$  
- Khoảng vô hạn:  $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$  

Mỗi khoảng này là một tập hợp vô hạn chứa vô số các số làm phân tử. Ví dụ, dù có độ dài ngắn, khoảng  $(0.1, 0.2)$  vẫn chứa vô số các số, tức là tất cả các số nằm giữa 0.1 và 0.2. Một sự trùng hợp ký hiệu không may là  $(a, b)$  có thể biểu thị cả một khoảng mở trên trục số và một điểm trên mặt phẳng. Sự khác biệt này thường rõ ràng dựa vào ngữ cảnh. Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ thấy một ý nghĩa khác nữa của  $(a, b)$ .

### Bài tập Phần 1.1

A. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của chúng trong dấu ngoặc nhọn.

1.  $\{5x - 1 : x \in \mathbb{Z}\}$  2.  $\{3x + 2 : x \in \mathbb{Z}\}$  3.  $\{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x < 7\}$  4.  $\{x \in \mathbb{N} : -2 < x \leq 7\}$  5.  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\}$  6.  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$  7.  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x = -6\}$  8.  $\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 5x^2 = -6\}$  9.  $\{x \in \mathbb{R} : \sin \pi x = 0\}$  10.  $\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 1\}$  11.  $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5\}$  12.  $\{x \in \mathbb{Z} : |2x| < 5\}$  13.  $\{x \in \mathbb{Z} : |6x| < 5\}$  14.  $\{5x : x \in \mathbb{Z}, |2x| \leq 8\}$  15.  $\{5a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$  16.  $\{6a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$

B. Viết mỗi tập hợp sau dưới dạng  $\{ \}$  ra tính chất đặc trưng ion.

17.  $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$  18.  $\{0, 4, 16, 36, 64, 100, \dots\}$  19.  $\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$  20.  $\{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}$  21.  $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$  22.  $\{3, 6, 11, 18, 27, 38, \dots\}$  23.  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  24.  $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$  25.  $\{\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$  26.  $\{\dots, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \dots\}$  27.  $\{\dots, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, \dots\}$  28.  $\{\dots, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, \frac{15}{4}, \frac{9}{2}, \dots\}$

}